専門科目（午前）　　　　22　大修

情報工学　　　　時間　9 : 30 ～ 12 : 30

集積システム専攻・計算工学専攻

注 意 事 項

1. 各解答用紙に受験番号を記入せよ．
2. 次の７題の中から４題を選択して解答せよ．５題以上解答した場合はすべて無効とする．
3. 解答は１題ごとに別々の解答用紙に，問題番号を明記した上で記入せよ．必要であれば，解答用紙の裏面に記入してよいが，解答用紙の表面にその旨を明記すること．
4. １枚の解答用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．
5. １題の解答を２枚以上の解答用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

1. xy 平面上において，原点を中心とする半径 a の円の内部（円周上の点は含まない）を領域 D とし，

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy \tag{1.1}$$

とする．以下の問に答えよ．

1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換したとき，領域 D の範囲を r, θ で表せ．

2) 上記の変換に対するヤコビ行列 J

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$$

および，その行列式を求めよ．

3) 式 (1.1) を計算し，a を用いて表せ．

4) $\lim_{a\to\infty} I$ の値を求めよ．

5) 4) の結果を利用して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

の値を求めよ．

6) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

について，$\Gamma(\frac{1}{2})$ の値を求めよ．

2. X を正規分布に従う確率変数とする．X の期待値を $E(X)$ と表す．実数 t について $E(e^{tX})$ が存在し，$E(e^{tX})$ をモーメント母関数 $M(t)$ と呼ぶ．以下の問に答えよ．

1) $\left.\dfrac{d^2}{dt^2}M(t)\right|_{t=0}=E(X^2)$ となることを示せ．

2) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 X のモーメント母関数を計算せよ．参考までに，標準正規分布の確率密度関数は，次式で与えられる．

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 X について，正の実数 ω を与えたとき，j を虚数単位（$j=\sqrt{-1}$）として，$E(e^{j\omega X})$ を求めたい．これを求めるのにまず正の実数 a を導入し，複素平面上に 4 点 $\mathrm{P}(-a,\ -j\omega)$，$\mathrm{Q}(a,\ -j\omega)$，$\mathrm{R}(a,\ 0)$，$\mathrm{S}(-a,\ 0)$ を考える．次に長方形の閉路 C：P→Q→R→S→P 上で，複素変数 z の関数

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

の積分を考え，$a\to\infty$ の極限をとる．

a) $\oint_C f(z)dz$ を求めよ．ただし，根拠も示せ．

b) 直線経路 C_3：R→S 上で $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{C_3} f(z)dz=-1$ となることを示せ．

c) 直線経路 C_2：Q→R，C_4：S→P とする．$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{C_2} f(z)dz+\lim_{a\to\infty}\int_{C_4} f(z)dz$ を計算せよ．

d) 直線経路 C_1：P→Q 上での $f(z)$ の積分と，上記 a)，b)，c) の結果から，$E(e^{j\omega X})$ を計算せよ．

3. 以下の数理論理学の問題に答えよ．

1) 以下の命題論理の問題に答えよ．

a) α, β, γ を命題変数とする．以下の命題論理式がトートロジー（恒真式）であるか否かを述べよ．

イ)　$\alpha \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$

ロ)　$\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \beta)$

ハ)　$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

ニ)　$((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$

b) ブール関数 $H(\alpha, \beta)$ と $G(\alpha, \beta)$ の真理値表がそれぞれ以下のように与えられている．α, β は命題変数であり，T は真，F は偽を表す．

α	β	$H(\alpha, \beta)$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

α	β	$G(\alpha, \beta)$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

イ)　$\neg\alpha$ を関数 H のみを用いて表せ．

ロ)　$\alpha \wedge \beta$ を関数 H のみを用いて表せ．

ハ)　$\alpha \vee \beta$ を関数 H のみを用いて表せ．

ニ)　$G(\alpha, \beta)$ を関数 H のみを用いて表せ．

2) 以下の述語論理の問題に答えよ．

a) x, y, z が自然数であるとき，次の各論理式の真偽を理由と共に述べよ．

イ)　$\exists x \forall y((x < y) \vee (x = y))$

ロ)　$\forall x \forall y \exists z((x < z) \wedge (y < z))$

ハ)　$\forall x \forall y \exists z((x < y) \Rightarrow ((z < x) \vee (y < z)))$

ニ)　$\forall x \forall y((x < y) \Rightarrow \exists z((x < z) \wedge (z < y)))$

b) x, y, z が実数であるとき，上記イ)，ロ)，ハ)，ニ）の各論理式の真偽を理由と共に述べよ．

4. 角周波数が ω である正弦波交流電圧を発生する内部抵抗を持つ電圧源がある．その複素表示された電圧 V_S と内部抵抗の値 R_S は一定であるとする．以下の問では，この電圧源に直接あるいはLC回路を介して接続される抵抗で消費される実効電力 (有効電力) を最大とするための条件について考える．ただし，ω とすべての素子値を正とする．また，図4.1において，抵抗値が R である抵抗で消費される実効電力を P とすると，P は $P = R|I|^2 = |V|^2/R$ である．

1) 図4.2は内部抵抗を持つ電圧源に抵抗 R_1 を接続した回路である．以下の問に答えよ．

a) 抵抗 R_1 の値を変えることにより，抵抗 R_1 で消費される実効電力 P_1 が最大となるときの P_1 を R_S と V_S を用いて表せ．

b) 実効電力 P_1 が最大となるときの R_1 を R_S を用いて表せ．

2) 図4.3は内部抵抗を持つ電圧源にLC回路を介して抵抗 R_2 を接続した回路であり，図4.4は図4.3の回路から内部抵抗とともに電圧源を取り去った回路である．以下の問に答えよ．

a) 図4.4の端子1と端子1'の間のインピーダンスを Z_L とするとき，Z_L を角周波数 ω の関数として R_2 と L_2 と C_2 を用いて表せ．

b) 図4.4の Z_L が実数となる ω を R_2 と L_2 と C_2 を用いて表せ．

c) 図4.3において，抵抗 R_2 を流れる電流 I_2 は

$$I_2 = \frac{V_S}{(1 + j\omega C_2 R_S)X} \tag{4.1}$$

であり，また，抵抗 R_2 で消費される実効電力 P_2 は

$$P_2 = \frac{R_2|V_S|^2}{(1+\omega^2 C_2^2 R_S^2)\left\{\left(\frac{R_S}{1+\omega^2 C_2^2 R_S^2} + R_2\right)^2 + \omega^2 Y^2\right\}} \tag{4.2}$$

である．ただし，j は虚数単位である．X と Y を求めよ．

d) 図4.3において P_2 が最大となるのは $Y = 0$ かつ Z_L が実数で，さらに R_2 と R_S がある大小関係を満たすときである．R_2 と R_S の大小関係を根拠とともに示せ．

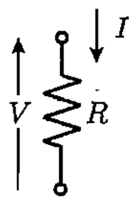

図4.1

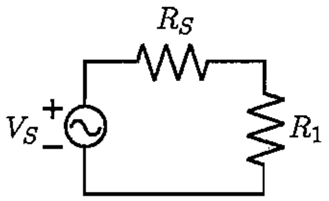

図4.2

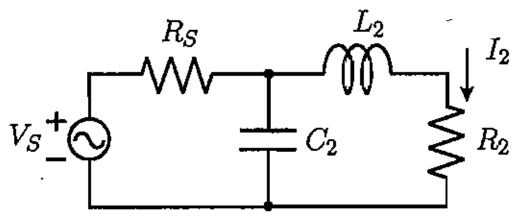

図4.3

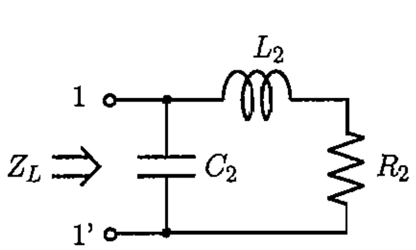

図4.4

5. 雑音や遅延のない理想的なアナログ伝送路を用いてディジタルデータの伝送を行いたい．以下の問に答えよ．

1) 時間信号 $p(t)$ の周波数特性が $\frac{W}{2}$[Hz] に帯域制限されている信号 $P(f)$ が

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{W} & (|f| \leq \frac{W}{2}) \\ 0 & (|f| > \frac{W}{2}) \end{cases}$$

のように与えられているとする．このとき $p(t)$ を求め，波形を図示せよ．

2) 1) で求めた $p(t)$ を用いて，ディジタルデータ $\delta_n \in \{0,1\}$ の系列 $(\cdots, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots)$ の伝送を

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n p(t - nT)$$

によって行う．このとき，任意のディジタルデータ系列 $(\cdots, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots)$ に対して $s(kT) = \delta_k$(k は任意の整数) が成立するために必要かつ十分な T と W の関係を求めよ．

3) 2) で述べた伝送方式によって伝送可能な最大伝送速度 [bit/s] を求めよ．

6. 下図のような X_4, X_3, X_2, X_1 を被乗数，Y_4, Y_3, Y_2, Y_1 を乗数，$Z_8, Z_7, \ldots, Z_1$ を積とする 4bit 乗算回路を考える (X_1，Y_1，Z_1 が LSB)．なお，これらの数は 2 の補数で表現する．

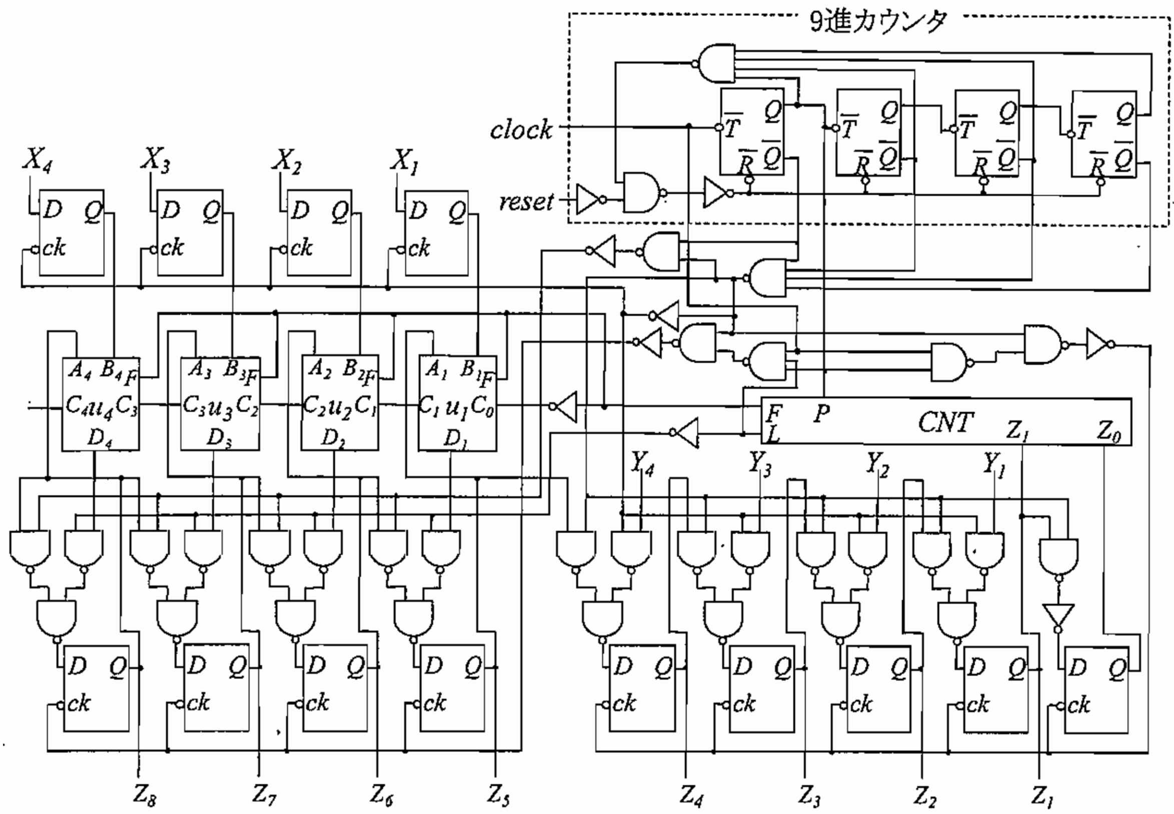

図 6.1 4bit 乗算回路

1) 回路図中の u_4, u_3, u_2, u_1 は，F が 1 の時は入力 A_4, A_3, A_2, A_1 と B_4, B_3, B_2, B_1 を加算した結果を D_4, D_3, D_2, D_1 に出力し，F が 0 の時は A_4, A_3, A_2, A_1 から B_4, B_3, B_2, B_1 を減算した結果を D_4, D_3, D_2, D_1 に出力する回路である (A_1，B_1，D_1 が LSB)．

   a) $u_i (1 \leq i \leq 4)$ は内部に 1bit どうしの加算を行う半加算器 HA を持つ．2 入力 NAND 素子のみで半加算器 HA を構成せよ．

   b) 半加算器 HA と 2 入力 NAND 素子と NOT 素子を用いて u_i を構成せよ．

2) 回路図中の D-FF は，内部にマスタースレーブ型の JK-FF を持ち，ck が $0 \to 1$ 時の D の値を，ck が $1 \to 0$ となった直後に Q へ出力する．そのような D-FF を 2 または 3 入力 NAND 素子および NOT 素子で構成せよ．

次ページに続く

3) P, Z_1, Z_0 を入力，F, L を出力とする組み合わせ回路 CNT は以下のように $Z_8, \ldots, Z_0$ の生成を制御する．2 または 3 入力 NAND 素子および NOT 素子を用い，できるだけ少数の素子で CNT を構成せよ．

P	Z_1	Z_0	制御内容 (clock に同期)
1	0	0	$Z_8, \ldots, Z_0$ の値はそのまま
1	0	1	$Z_8, \ldots, Z_5$ と $X_4, \ldots, X_1$ を加算した結果を $Z_8, \ldots, Z_5$ に格納
1	1	0	$Z_8, \ldots, Z_5$ から $X_4, \ldots, X_1$ を減算した結果を $Z_8, \ldots, Z_5$ に格納
1	1	1	$Z_8, \ldots, Z_0$ の値はそのまま
0	*	*	CNT としては値に影響を与えず，外の回路で $Z_8, \ldots, Z_0$ を右シフト

4) X_4, X_3, X_2, X_1 が 0,0,1,0 で，Y_4, Y_3, Y_2, Y_1 が 0,1,1,0 の場合に，reset を $0 \to 1 \to 0$ とした後で clock が 3, 4, 5 度目に $1 \to 0$ となった直後の F および L の値がどうなるか，それぞれの clock に対して示せ．

5) 上記の乗算回路は，乗数の中で連続する 1 があった時，その最初の 1 が出てきた点で減算を行い，その最後の 1 の後でそれを補正する加算を行っている．このため，Z_1，Z_0 両方が 0 あるいは 1 でのシフトのみの場合に，シフトの前のクロックを省略することで高速化できる．連続する Z_2, Z_1, Z_0 の 3bit を見ることで，さらに処理を高速化できる．3bit を見るときに追加すべき機能と，Z_2, Z_1, Z_0 の値の各組み合わせに対する処理を述べよ．

7. 異なる n 個のものから重複を許さず k 個を選ぶ組合せの数 ${}_nC_k$ の求め方として，再帰的な定義を用いる方法や，階乗による定義 ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ を用いる方法などがある．図 7.1 のパスカルの三角形の最上段を 0 段目，最左を 0 番目とすると，n 段目の左から k 番目の数は ${}_nC_k$ を表している．${}_nC_k$ を求める C 言語の関数 comb1, comb2, comb3 について，以下の問に答えよ．

```
int comb1(int n, int k) {
  if ((k == 0) || (k == n)) return 1;
  else return comb1([A],[B]) + comb1([C],[D]);
}
int comb2(int n, int k) {
  int i, j;
  if (n >= 2 * k) {
    i = n - k + 1;
    j = k;
  } else {
    i = k + 1;
    j = n - k;
  }
  return pf([E],[F]) / pf([G],[H]);
}
int pf(int m, int n) {
  int i, f;
  f = 1;
  for (i = m; i <= n; i++) {
    f = f * i;
  }
  return f;
}
```

```
int comb3(int n, int k) {
  int i, j;
  int a[MAXARG];
  if (n - k < k) k = n - k;
  if (k == 0) return 1;
  if (k == 1) return n;
  for (i = 0; i < k; i++) {
    a[i] = i + 2;
  }
  for (i = 3; i <= [I]; i++) {
    a[0] = i;
    for (j = 1; j < k; j++) {
      a[j] += a[j - 1];
    }
  }
  return [J];
}
```

1) 関数 comb1 の $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ を答えよ．

2) ${}_7C_3$ を comb1(7,3) で求める際に，関数 comb1 が呼び出される回数を答えよ．ただし最初の呼び出し comb1(7,3) も 1 回と数えるとする．

3) 関数 comb2 の $\boxed{E}$, $\boxed{F}$, $\boxed{G}$, $\boxed{H}$ を答えよ．

4) 関数 comb1 の関数 comb2 に対する，実行時の長所と短所を述べよ．

5) パスカルの三角形における ${}_2C_1$, ${}_3C_2$, ..., ${}_{k+1}C_k$ を初期値とする配列 a (a[0] = ${}_2C_1$, a[1] = ${}_3C_2$, ...) を用いて ${}_nC_k$ を計算する関数 comb3 の $\boxed{I}$, $\boxed{J}$ を答えよ．また計算時に配列 a の内容がどう更新されるか，図 7.1 を用いて説明せよ．ただし MAXARG は k より大きいものとする．

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
.....................................
```

図 7.1 パスカルの三角形