専門科目(午前)

18 大修

情報工学

時間 9:30〜12:30

集積システム専攻・計算工学専攻

注 意 事 項

1. 次の7題の中から4題を選択して解答せよ．5題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は1題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

1. 3×3 実行列 A を

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定義する。以下の問に答えよ。

1) 行列 A の行列式を求めよ。

2) I を 3×3 単位行列、x を変数としたとき、行列 $xI - A$ の行列式を求めよ。

3) 行列 A の固有値を全て求めよ。

4) 行列 A の各々の固有値について、その固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

5) ユニタリ行列の定義を述べ、その定義を行列 A が満たしていることを示せ。

6) エルミート行列の定義を述べ、その定義を行列 A が満たしていることを示せ。

7) $A = BDB^*$ を満たす行列 B と対角行列 D を求めよ。ただし B^* は B の共役転置である。

2．

実関数 $f(t) = \begin{cases} t^2 & : \quad t \geq a \\ 0 & : \quad t < a \end{cases} \qquad (a > 0)$

を考える。

1) $H(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t \geq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$

で定義される関数をヘビサイドの単位階段関数という。

$H(t-a)$ のラプラス変換を求めよ。

2) ヘビサイドの単位階段関数を用いて、 $f(t)$ を表せ。

3) $f(t)$ のラプラス変換を求めよ。

4) $I = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (a < b)$ を、数値積分で求める。

積分区間 $[a, b]$ を m 等分して、各小区間に台形則とシンプソン則を適用する。

a) $m=1$ としたときの積分の誤差を、台形則とシンプソン則のそれぞれの場合について、a と b を用いて表せ。

b) $m=2$ としたときの積分の誤差を、台形則とシンプソン則のそれぞれの場合について、a と b を用いて表せ。

3. 以下の問に答えよ。

1）アルファベット $\{a,b,c\}$ 上の言語 $L=\{a^n b^m c b^m a^n \mid n\geq 1, m\geq 0\}$ を考える。L は $abbcbba$ や aca などの回文の集合である。生成規則集合 $\{S\to aSa, S\to aTa\}$ にさらに生成規則を２つ付け加えて L を生成する文脈自由文法を完成させたい。ただし S は開始記号であり、T は非終端記号である。付け加えるべき２つの生成規則を書け。

2）式 (a + b) ∗ ((c/d) − e) を表す２分木 T が以下の図のように与えられている。ただし a，b，c，d，e は数値を表す記号であり、+，-，*，/ は２項算術演算を表す記号である。

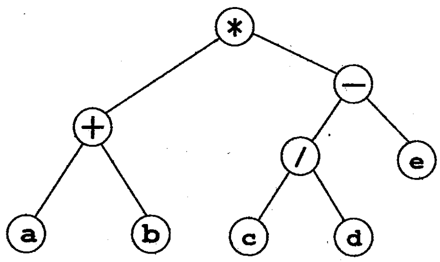

図 3.1　　２分木 T

a) T を前順序（プレオーダー）でたどる順序を記せ。

b) T を後順序（ポストオーダー）でたどる順序を記せ。

3）命題変数またはその否定をリテラルという。命題論理式がリテラルの論理積の論理和であるとき、その命題論理式は論理和形であるという。$\neg((A\vee B)\wedge(\neg(A\vee\neg C)))$ を論理和形に直せ。

4） $x < y$ を 自然数 $\mathbf{N}$ の上の大小関係（x は y より小さい）を表す述語とする。

a）「任意の x に対しそれより大きい y が存在する」を述語論理式に翻訳せよ。

b）述語論理式 $\forall x \forall y \{\neg(x < y) \Rightarrow (y < x)\}$ の $\mathbf{N}$ での真偽を理由とともに述べよ。

c）述語論理式 $\neg\forall x \forall y \{\neg(x < y) \Rightarrow (y < x)\}$ の冠頭標準形を書け。

4. 以下の問に答えよ。

1) 図 4.1 に示す電圧源、抵抗、容量からなる回路 1 において、時刻 t における電圧源および容量 C_0 の電圧をそれぞれ $v_0(t)$ と $v_1(t)$ で表す。以下の問に答えよ。

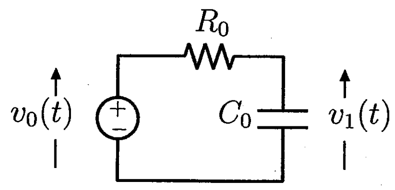

図 4.1　回路 1

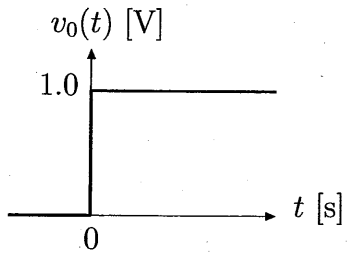

図 4.2　電圧源の波形

a) $\boxed{①}$ を埋めて $v_0(t)$ と $v_1(t)$ の関係を示す式 (4.1) を完成させよ。

$$v_0(t) = \left(\boxed{①}\right)\frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t) \tag{4.1}$$

b) 電圧源の電圧 $v_0(t)$ を図 4.2 に示すように変化させた。この場合 $v_1(0) = 0$ となる。以下の問に答えよ。

i) $v_1(t)$ $(t \geq 0)$ の波形の概形を描け。

ii) $v_1(t)$ $(t \geq 0)$ を時刻 t に関する式として求めよ。

iii) $R_0 = 1.0\,\Omega$、$C_0 = 2.0\,\mathrm{F}$ であるとき、$v_1(t)$ が $0.5\,\mathrm{V}$ となる時刻 t_1 を求めよ。ただし、$\ln 2 \approx 0.69$ と近似せよ。

2) 図 4.3 に示す電圧源、抵抗、容量からなる回路 2 において、時刻 t における電圧源および容量 C_1 の電圧をそれぞれ $v_2(t)$ と $v_3(t)$ で表す。以下の問に答えよ。

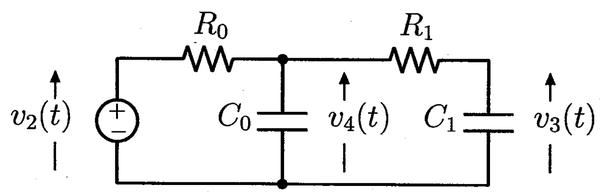

図 4.3　回路 2

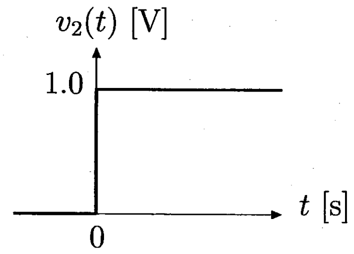

図 4.4　電圧源の波形

a) $\boxed{②}$ を埋めて $v_2(t)$ と $v_3(t)$ の関係を示す式 (4.2) を完成させよ。

$$v_2(t) = R_0C_0R_1C_1\frac{d^2v_3(t)}{dt^2} + \left(\boxed{\quad ② \quad}\right)\frac{dv_3(t)}{dt} + v_3(t) \tag{4.2}$$

b) 電圧源の電圧 $v_2(t)$ を図 4.4 に示すように変化させた。この場合

$$v_3(0) = \frac{dv_3(0)}{dt} = 0$$

となる。また、$R_0 = 1.0\,\Omega$、$R_1 = 2.0\,\Omega$、$C_0 = 2.0\,\mathrm{F}$、$C_1 = 1.0\,\mathrm{F}$ であるとき、λ_1 および λ_2 を式 (4.2) の特性方程式の解、A および B を定数、e を自然対数の底とすると、$t \geq 0$ のとき

$$v_3(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + 1$$

となる。λ_1、λ_2、A、B をそれぞれ求めよ。

3) 図 4.3 の回路 2 の容量 C_1 の電圧 $v_3(t)$ および容量 C_0 の電圧 $v_4(t)$ が問 2)b) の条件で 0.5 V となる時刻をそれぞれ t_3 と t_4 とする。問 1)b)iii) で求めた時刻 t_1、および t_3 と t_4 を小さい順に示せ。

5. 情報源符号化に関して、以下の問に答えよ。

1) 情報源アルファベット $\{s_1, s_2, \ldots, s_6\}$ を有する次の無記憶情報源の符号化を考える。

表 5.1 無記憶情報源

記号	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
生起確率	1/14	1/14	1/7	1/7	2/7	2/7

a) この情報源のエントロピーは何ビットか。必要ならば、$\log_2 7 \approx 2.807$ を用いてよい。

b) この情報源に対する2元ハフマン符号を一つ作れ。また、得られた符号の平均符号長はいくらか。

c) 上で得られた符号と異なる符号の木を有する2元ハフマン符号を一つ作り、平均符号長を求めよ。

2) 6種の記号 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ の2元瞬時符号による符号化を考える。

a) 記号 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ に対応する符号語長を 2,2,2,4,4,4 と設定するとき、クラフトの不等式を利用することで、このような符号語長の設定で2元瞬時符号が構成できるかどうかを調べ、構成可能ならば符号を構成せよ。

b) $a_1, a_2, \ldots, a_6$ に対応する符号語長を 2,2,2,3,3,4 と設定した場合について、上記の問 2)a) に答えよ。

3) 下記の2元符号の中でハフマン符号に成り得ない符号はどれか。また、成り得ない符号については、ハフマン符号になるように符号語を短縮せよ。

Code A: $\{1, 00, 01\}$
Code B: $\{000, 01, 10, 11\}$
Code C: $\{01, 11\}$

6. 1) 図 6.1 に示す組合せ回路について下記の問に答えよ。

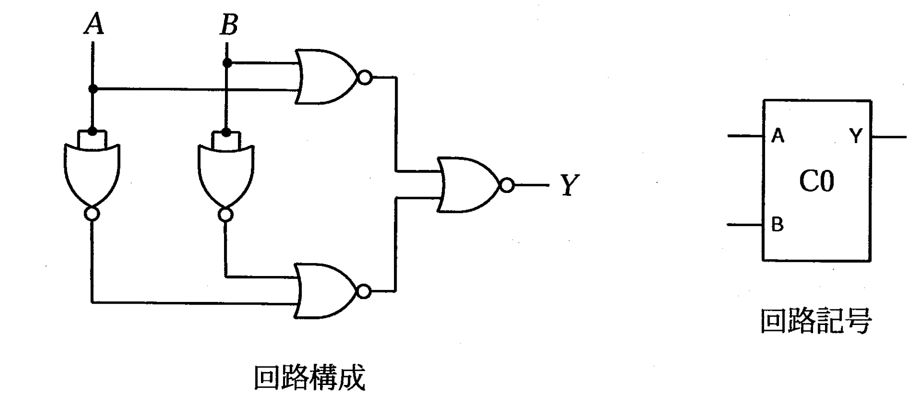

図 6.1 組合せ回路 C0

a) 回路 C0 の真理値表を作成せよ。

b) NAND ゲートのみを用いて、回路 C0 に等価な回路を作成せよ。

2) 図 6.2 に示す順序回路について下記の問に答えよ。

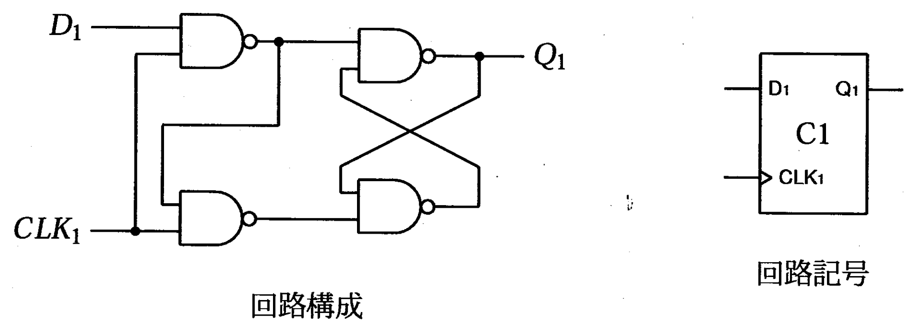

図 6.2 順序回路 C1

a) クロック (CLK_1) が 1 の場合の D_1 と Q_1 の関係、およびクロックが 0 の場合の D_1 と Q_1 の関係をそれぞれ述べよ。

b) 回路 C1 をもとにして、図 6.3 に示す回路 C2 を構成する。
回路 C2 に図 6.4 の入力信号を与えたときの Q_1' のタイミングチャートを描け。

c) 回路 C2 に図 6.4 の入力信号を与えたときの Q_2 のタイミングチャートを描け。

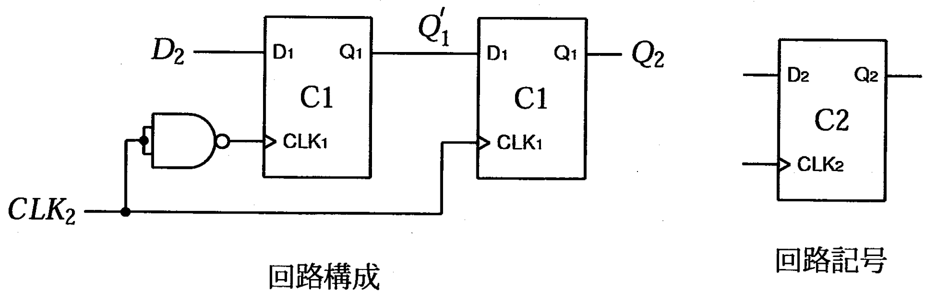

図 6.3 順序回路 C2

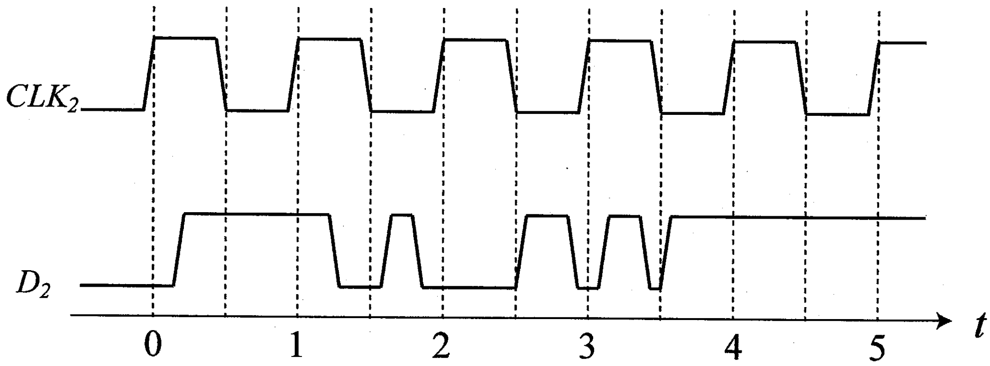

図 6.4 回路 C2 への入力信号

3) 図 6.5 に示す回路 C4 は、*IN* を入力とし、*SUM* と *CARRY* を出力する。D_3 には *IN* をクロック (*CLK*) に同期させた信号が出力される。連続する 2 クロック分の D_3 の値の算術和 (*SUM*) と桁上げ (*CARRY*) を出力する回路 C3 を構成せよ。作図には C0 および C2 の回路記号および NAND ゲートのみを使用すること。

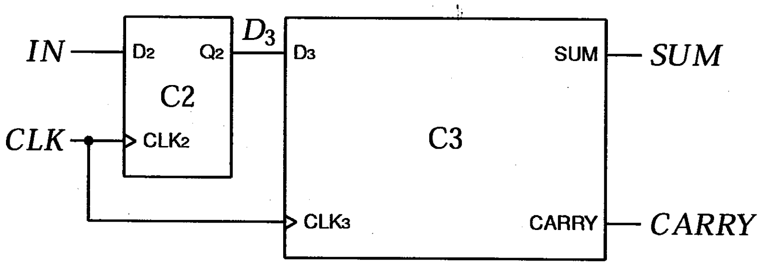

図 6.5 回路 C4

7. 右のC言語で書かれた整列に関する関数を読み、問に答えよ。

1) 配列 b[]={13,9,6,1,4} について関数呼び出し sort1(b,5) を行う。

   a) 関数 swap の1回目の呼び出しから戻った時点での配列 b の要素の並びを記せ。

   b) 関数呼び出し sort1(b,5) から戻った時点での配列 b の要素の並びを記せ。

   c) 関数呼び出し sort1(b,5) から戻るまでの関数 comp の呼び出し回数を記せ。

2) 要素数 n の配列を関数 sort1 を使って整列する。関数 comp の呼び出し回数を n の関数として表せ。

3) 関数 sort1 とは逆順に整列を行う関数 void sort1r(int a[], int n) を関数 sort1 の定義を一部変更して定義せよ。

4) 配列 c[]={9,8,5,1,2} について関数呼び出し sort2(c,5) を行う。

   a) 関数 swap の1回目の呼び出しから戻った時点での配列 c の要素の並びを記せ。

   b) 関数 swap の3回目の呼び出しから戻った時点での配列 c の要素の並びを記せ。

   c) 2回目に関数 partition が呼び出される時の引数 l,r の値を記せ。

   d) 関数呼び出し sort2(c,5) から戻るまでの関数 comp の呼び出し回数を記せ。

```
int comp(int a, int b){
  if(a<b){
    return 1;
  }else{
    return 0;
  }
}

void swap(int *a, int *b){
  int t;
  t=*a; *a=*b; *b=t;
}

void sort1(int a[], int n){
  int i, j;
  for(i=0; i<n-1; i++){
    for(j=n-1; j>i; j--){
      if(comp(a[j],a[j-1])){
        swap(&a[j],&a[j-1]);
      }
    }
  }
}

int partition(int a[], int l, int r){
  int i, j, pv;
  i=l-1;
  j=r;
  pv=a[r];
  while(1){
    while(comp(a[++i],pv));
    while(i< --j && comp(pv,a[j]));
    if(i>=j){
      break;
    }
    swap(&a[i],&a[j]);
  }
  swap(&a[i],&a[r]);
  return i;
}

void sort2_i(int a[], int l, int r){
  int v;
  if(l>=r){
    return;
  }
  v=partition(a,l,r);
  sort2_i(a,l,v-1);
  sort2_i(a,v+1,r);
}

void sort2(int a[], int n){
  sort2_i(a,0,n-1);
}
```