専門科目（午前）　　　　　　　　　　１７　大修

情報工学・通信工学　　　　　　　時間　9 : 30 ～ 11 : 00

注 意 事 項

1. 次の 4 題の中から 2 題を選択して解答せよ．3 題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

---

1. K_0, K_1 を正の整数、α_k を実数とする。関数 $x(t)$ が次式で与えられる。

$$x(t) = \sum_{k=-K_1}^{K_1} \alpha_k \cos\left[\frac{2\pi(K_0+k)t}{T}\right]$$

ただし、$\alpha_k \neq 0,\ K_0 > K_1,\ T > 0$ である。

1) $x(t)$ が周期 T の周期関数であることを示せ。

2) 区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ における $x(t)$ の複素フーリエ係数 c_n を次式を用いて求めよ。ただし、n は整数である。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt$$

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

3) 関数 $p(t)$ が次式で与えられるとする。

$$p(t) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2} \text{のとき} \\ 0 & t < -\dfrac{T}{2},\ \dfrac{T}{2} < t \text{ のとき} \end{cases}$$

a) 次式を用いて $p(t)$ のフーリエ変換 $P(f)$ を求めよ。

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

b) $y(t) = p(t)x(t)$ とし、$y(t)$ のフーリエ変換 $Y(f)$ を求めよ。

4) $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ は

$$X(f) = \sum_{k=-K_1}^{K_1} \frac{\alpha_k}{2}\left[\delta\left(f - \frac{K_0+k}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{K_0+k}{T}\right)\right] \tag{1.1}$$

となることを示せ。デルタ関数 $\delta(f)$ は、連続関数 $q(f)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} q(f)\delta(f)df = q(0)$ となる関数であり、ここでは、関係式 $\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t}dt$ を用いてもよい。

5) 関数 $z(t)$ は $z(t) = h(t)x(t)$ で与えられる。ただし、$h(t)$ は実関数で、そのフーリエ変換を $H(f)$ とする。$z(t)$ のフーリエ変換 $Z(f)$ を関数 $X(f)$ と $H(f)$ を用いて表せ。さらに、$X(f)$ に式 (1.1) を代入し、関数 $H(f)$ を用いて $Z(f)$ を表せ。

2． n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 、 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ の内積を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ で定義し、$\boldsymbol{x}$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ とする。 n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}_n)$ の行列式は

$$\det(\boldsymbol{X})=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{n\sigma(n)}$$

で定義される。ただし、$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in})^T$ 、S_n は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換全体の集合、記号 $\mathrm{sgn}\,\sigma$ は $\sigma\in S_n$ が偶置換なら+1、奇置換なら -1 を表す。また、記号 $\sum_{\sigma\in S_n}$ は、置換 $\sigma\in S_n$ すべてにわたる和を表し、$\sigma(i)$ は、置換 σ による i の像を表す。

1）任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して、$\det(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+\det(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$
が成立することを証明せよ。

2）任意の実数 β 、整数 $i(1<i\leq n)$ に対して、$\det(\boldsymbol{x}_1+\beta\,\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$
が成立することを証明せよ。

3） $\boldsymbol{A}\,,\boldsymbol{B}$ を $n\times n$ 行列とする。

a) $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$　が成立することを証明せよ。

b) 行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列 $\boldsymbol{A}^T$ に対し、$\det(\boldsymbol{A}^T)=\det(\boldsymbol{A})$　が成立することを証明せよ。

4） n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ が互いに直交するとき、

$$|\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|=\|\boldsymbol{x}_1\|\times\|\boldsymbol{x}_2\|\times\cdots\times\|\boldsymbol{x}_n\|$$

が成立することを証明せよ。

5） n 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ に対し、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{x}_1,$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j=\boldsymbol{x}_j-\sum_{i=1}^{j-1}\gamma_{ij}\tilde{\boldsymbol{x}}_i,\qquad \gamma_{ij}=\frac{(\tilde{\boldsymbol{x}}_i,\boldsymbol{x}_j)}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}_i\|^2}\qquad (j=2,3,\ldots,n)$$

とする。このとき、

$$|\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)|=\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|\times\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|\times\cdots\times\|\tilde{\boldsymbol{x}}_n\|$$

が成立することを証明せよ。

3. 関数 f を、文字集合 $T = \{a, b\}$ 上の長さ0以上の文字列すべての集合 T^* から、非負整数すべての集合への関数とし、以下のように再帰的に定義する。ただし、ε は空列で、w は T^* の要素である。

$f(\varepsilon)=0$, $f(wa)=2f(w)+1$, $f(wb)=2f(w)+2$

例えば、$f(\varepsilon)=0$、$f(a)=1$、$f(b)=2$、$f(aa)=3$、$f(ab)=4$ である。

以下の言語が、正規言語であるか、正規言語でないかを述べよ。正規言語の場合は、その言語を受理する最小状態数の決定性有限オートマトンの構成過程を示し、最小状態数を述べよ。正規言語でない場合は、正規言語でないことを証明せよ。

1) $L1=\{w \mid w$ は T^* の要素で、$f(w) < 2\}$

2) $L2=\{w \mid w$ は T^* の要素で、$f(w) > 2\}$

3) $L3=\{w \mid w$ は T^* の要素で、$f(w) = 2i+1$、i は非負整数$\}$

4) $L4=\{w \mid w$ は T^* の要素で、$f(w) = 4i+1$ または $f(w) = 4i+2$、i は非負整数$\}$

4. グラフの異なる点の系列 $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ は、$i = 1, 2, \ldots, k$ に対して v_{i-1} と v_i が隣接しているとき、v_0 と v_k を結ぶパスであるといい、k をそのパスの長さという。特に、1 点から成る点の系列 (v_0) は v_0 と v_0 を結ぶ長さ 0 のパスである。グラフは、任意の 2 点を結ぶパスが存在するとき、連結であるという。連結グラフ G の 2 点を結ぶパスの長さの最小値をその 2 点間の距離といい、G の点 v と各点の間の距離の最大値を v の離心度という。G のすべての点の離心度の最大値を G の直径といい、最小値を G の半径という。また、離心度が最小である点を G の中心という。以下の問に答えよ。

1) 直径が半径の 2 倍よりも小さい連結グラフを示せ。
2) 直径が半径のちょうど 2 倍である連結グラフを示せ。
3) 任意の連結グラフの直径は高々半径の 2 倍であることを証明せよ。
4) 中心がちょうど 1 つある木を示せ。
5) 中心が 2 つある木を示せ。
6) 任意の木には高々2 つの中心が存在することを証明せよ。
7) 任意の正整数 n に対して、n 個の中心をもつ連結グラフが存在することを証明せよ。