専門科目（午前）　　　　　　　　　　１５　大修

情報工学・通信工学　　　　　　　　　時間　9 : 30 ～ 11 : 00

注　意　事　項

1. 次の 4 題の中から 2 題を選択して解答せよ．3 題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
3. 各解答用紙に問題番号及び受験番号を記入せよ．
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

---

1. 周期信号 $x(t)$ と $y(t)$ が同じ周期 T をもつとする。周期畳み込みを

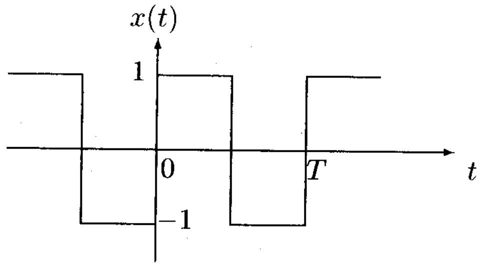
$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_0^T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

で定義する。

1) $z(t)$ も同じ周期 T の周期関数であることを示せ。
2) 積分は長さ T の任意の区間であればよいこと，すなわち

$$z(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

で初期値 t_0 は任意であることを示せ。
3) 図に示す矩形波 $x(t)$ とそれ自身の周期畳み込みを計算し，図示せよ。



4) $x(t)$ と $y(t)$ の複素フーリエ級数展開係数をそれぞれ a_k と b_k とする。$z(t)$ の複素フーリエ級数展開係数 c_k を a_k と b_k を用いて表せ。
5) $z(t) = x(t) \otimes x^*(-t)$ に対する複素フーリエ級数展開係数の関係式を求め，$t = 0$ と置くことにより，周期信号の Parseval の式

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

を導け。ただし，$x^*(t)$ は $x(t)$ の複素共役である。

2. $\mathbf{C}$ をすべての複素数の集合とし，$\mathbf{I}_N \in \mathbf{C}^{N\times N}$ を単位行列とする。すべての $\mathbf{X} \in \mathbf{C}^{N\times M}$ に対して $\mathbf{X}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}}$ のように表記する。ただし，* と $^{\mathrm{T}}$ は，それぞれ，複素共役と転置を表す。ベクトル $\mathbf{a}_k \in \mathbf{C}^{N\times 1}$ $(k = 1, \ldots, N)$ は $\mathbf{C}$ 上で線形独立とする。行列 $\mathbf{R}_n$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{R}_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\mathrm{H}} + \sigma \mathbf{I}_N \in \mathbf{C}^{N\times N}$$

1) $\mathbf{R}_1 := \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^{\mathrm{H}} + \sigma \mathbf{I}_N \in \mathbf{C}^{N\times N}$ のすべての固有値を求めよ。ただし，σ は正の実数とする。

2) $\mathbf{e}_i \in \mathbf{C}^{N\times 1}$ $(i = 1, \ldots, N)$ は $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ の正規化された固有ベクトルとする。ただし，$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_N) \in \mathbf{C}^{N\times N}$ である。このとき $\mathbf{e}_i$ は $\mathbf{R}_N$ の固有ベクトルになることを示せ。

3) $\mathbf{e}_i$ を $\mathbf{R}_N$ の固有ベクトル，λ_i を $\mathbf{e}_i$ に対応する固有値とする。$\alpha_{k,i} = \mathbf{a}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{e}_i$ を用いて，λ_i を表せ。

4) すべての固有値 λ_i が互いに異なるとき，$\mathbf{R}_N$ は以下のように表されることを示せ。

$$\mathbf{R}_N = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{H}}$$

5) すべての固有値 λ_i が互いに異なるとき，任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{N\times 1}$ に対して以下の式が成立することを示せ。

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}} \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{-1}\, |\mathbf{e}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{x}|^2$$

3． 終端記号集合$\{a\}$を持つ以下の言語$L1$，$L2$，$L3$について考える。

$L1 = \{\, a^m \mid m=2n+1,\ n$は0以上の整数$\}$,

$L2 = \{\, a^m \mid m=2n+1$ または $m=3n+1,\ n$は0以上の整数$\}$,

$L3 = \{\, a^m \mid m=2^n,\ n$は0以上の整数$\}$.

1） 言語$L1$，$L2$，$L3$の中から正規言語であるものをすべて選択せよ。正規言語である理由も示せ。存在しない場合には「なし」と書け。

2） 言語$L1$，$L2$，$L3$に正規言語がある場合には，それらを受理する最小状態数の有限オートマトンを構成し，それぞれの最小状態数を求めよ。構成過程も示せ。存在しない場合には「なし」と書け。

3） 言語$L1$，$L2$，$L3$に正規言語でない言語がある場合には，正規言語でないことをそれぞれ証明せよ。証明では，まず利用する重要な定理や関係式を示し，次にそれらを用いて結論を導くこと。存在しない場合には，「なし」と書け。

4. グラフ G の点集合を $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ としたとき，(i,j) 要素 a_{ij} が点 v_i と v_j を結ぶ辺の数に等しいような $n\times n$ 行列 $A(G)=[a_{ij}]$ を G の隣接行列という。下に示す隣接行列 $A(H)$ で表現されるグラフ H に関する以下の問に答えよ。

1) グラフ H を図示せよ。

2) 点集合 $S\subseteq V(G)$ は，S の任意の2点が G において隣接していないとき，グラフ G の独立点集合であるという。グラフ H の点数が最大である独立点集合を1つ示せ。

3) $V(G)$ が2つの独立点集合 X と Y に分割できるとき，G を2部グラフといい，(X,Y) を G の2分割という。H が2部グラフであるならば，2分割を構成する2つの独立点集合を示せ。H が2部グラフではないならば，その理由を述べよ。

4) グラフの隣接する2点が異なる色で塗られるように，すべての点に色を塗ることをグラフの彩色といい，グラフ G の彩色に必要な色の最小数を G の彩色数という。グラフ H の彩色数を示せ。

5) グラフの点と辺の系列 $(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ は，以下の3条件：

- $e_i\neq e_j \quad (i\neq j)$
- $e_i=(x_{i-1},x_i) \quad (1\leq i\leq k)$
- $x_0=x_k$

を満たしているとき，閉トレイルであるという。グラフのすべての辺を含む閉トレイルをオイラー閉トレイルといい，オイラー閉トレイルが存在するグラフをオイラーグラフという。H がオイラーグラフであるならば，オイラー閉トレイルを示せ。H がオイラーグラフではないならば，その理由を述べよ。

$$A(H)=\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$$